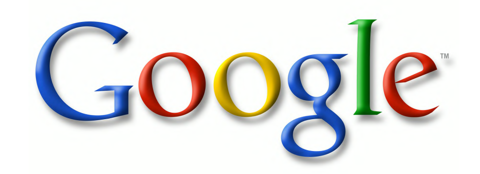
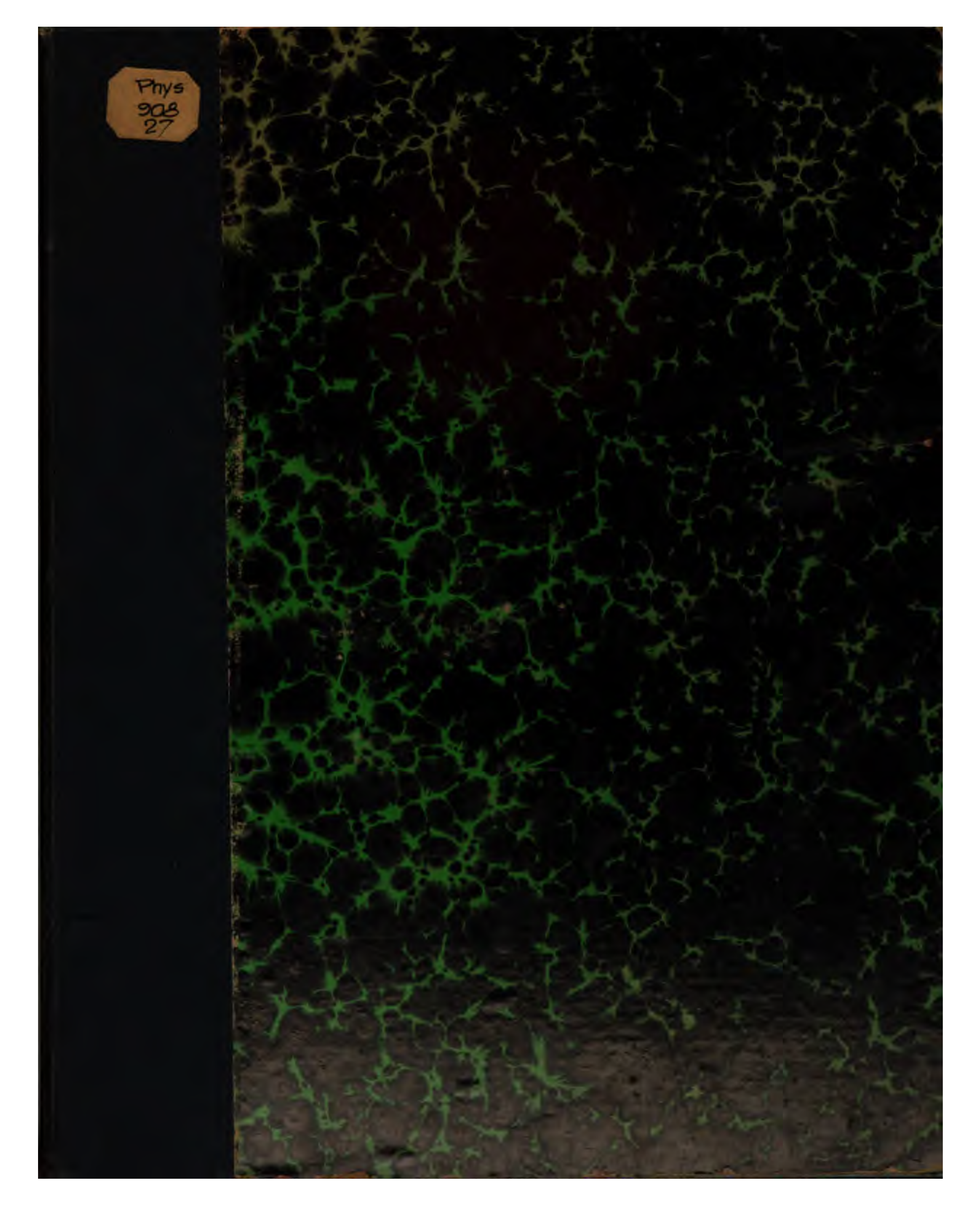
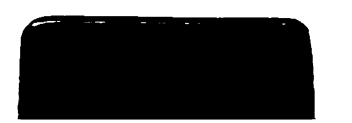



Phys
908
27





EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

SECONDE ANNÉE.



A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,

RUE SERPENTE, N.° 7.

1827.

IMPRIMERIE DE BÉTHUNE, HOTEL PALATIN, PRÈS SAINT-SULPICE.

EXERCICES

DE MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

AVERTISSEMENT.

L'ACCUEIL favorable que les douze livraisons des Exercices, publiées en 1826, ont reçu des Géomètres, détermine l'auteur à en faire paraître de nouvelles. Il y développera les diverses théories dont il a posé les bases dans les premières livraisons, et traitera plusieurs objets que le défaut d'espace l'avait obligé de passer sous silence. Il s'occupera particulièrement des applications de l'analyse à la physique, et montrera les facilités que présente à cet égard le calcul des résidus. Le premier volume des Exercices faisait déjà connaître une partie des avantages que l'on peut retirer de ce calcul pour la détermination des intégrales définies, pour la sommation des suites, et pour l'intégration des équations différentielles linéaires. On verra maintenant le même calcul fournir des méthodes générales pour la solution des problèmes de physique mathématique, et acquérir ainsi une importance qu'on aurait pu ne pas soupçonner au premier abord. Ces méthodes contribueront d'ailleurs aux progrès de l'analyse infinitésimale, et serviront non-seulement à intégrer des équations linéaires aux différences partielles, mais encore à déterminer les fonctions arbitraires

introduites par l'intégration, d'après des conditions données, à développer des fonctions quelconques en séries d'exponentielles dont les exposants soient respectivement proportionnels aux diverses racines d'une équation transcendante, et à fixer des limites entre lesquelles se trouvent renfermés les restes propres à compléter ces mêmes séries.



RECHERCHE DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE

POUR UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

ASSUJETTIS A DES LIAISONS QUELCONQUES.

§ 1.er *Considérations générales.*

On peut arriver par deux routes différentes aux équations d'équilibre de plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques. Le plus souvent on déduit ces équations du principe des vitesses virtuelles. Mais on peut aussi les établir directement à l'aide de diverses méthodes, entre lesquelles je vais en signaler une qui, à cause de sa simplicité, paraît digne de fixer un moment l'attention des géomètres.

Considérons un système de points matériels A, A', A'', etc...., sollicités par certaines forces. Si ces points matériels sont libres et indépendants les uns des autres, il sera nécessaire pour l'équilibre qu'après avoir réduit à une résultante unique toutes les forces appliquées à chaque point, on trouve chaque résultante égale à zéro. Mais, si les mêmes points sont assujettis à certaines liaisons, comme ces liaisons opposeront au mouvement du système certaines résistances, il ne sera plus nécessaire pour l'équilibre que la résultante des forces appliquées à chaque point s'évanouisse.

Il s'agit maintenant de faire voir comment on peut déduire les formules d'équilibre de la nature des liaisons supposées connues. Nous commencerons par examiner le cas particulier où il n'existe qu'une seule liaison, représentée par une seule équation entre les coordonnées des différents points. Nous traiterons ensuite le cas général où les liaisons sont en nombre quelconque.

§ 2.e *Équilibre de plusieurs points assujettis à une seule liaison.*

Supposons d'abord que les différents points se trouvent assujettis à une seule liaison. Soient dans cette hypothèse

$$x, y, z; \qquad x', y', z'; \qquad \text{etc.}\ldots,$$

les coordonnées rectangulaires des différents points A, A', A'', etc.... ;

$$P, P', \text{etc.}\ldots$$

les forces qui leur sont appliquées, réduites pour chaque point à une résultante unique, et

$$L = 0$$

l'équation de condition qui exprime la liaison donnée, L étant une fonction des variables x, y, z, x', y', z', etc. Je dis que l'équilibre pourra s'établir au moyen de la liaison, sans que la force P s'évanouisse, et même en général, quelle que soit l'intensité de cette force. Pour le démontrer, commençons par imaginer que l'on fixe tous les points du système à l'exception du point A qui a pour coordonnées x, y, z, et qu'en même temps on supprime les forces P', P'', etc., appliquées aux points A', A'', etc.... Les coordonnées x, y, z demeurant seules variables dans l'équation $L = 0$, la liaison exprimée par cette équation n'aura plus d'autre effet que d'assujettir le point A à rester constamment sur une certaine surface courbe; et, si cette surface présente une résistance indéfinie, comme cette résistance a lieu suivant la normale, il suffira, pour que la force P ne trouble pas l'équilibre, qu'elle soit elle-même dirigée perpendiculairement à la surface. Supposons maintenant que l'on restitue au second point A' sa mobilité primitive. L'équilibre sera troublé en général, et le système des deux points mobiles se mettra en mouvement. Mais il est clair qu'on pourra toujours empêcher ce mouvement par le moyen d'une nouvelle force P' appliquée au point A' dans une certaine direction. La force P' étant choisie comme on vient de le dire, restituons encore au point A'' sa mobilité primitive. Pour retenir ce troisième point à sa place, il suffira évidemment de lui appliquer une troisième force P'' dans une direction déterminée. En continuant de même, on conclura définitivement que tous les points redevenus mobiles, et liés seulement par l'équation $L = 0$, pourront être maintenus en équilibre à l'aide de certaines forces $P, P', P''\ldots$ appliquées à ces mêmes points suivant des directions données. Dans ce cas, la direction de chaque force sera perpendiculaire à la surface, que son point d'application est obligé de décrire, en vertu de l'équation $L = 0$, lorsqu'on fixe tous les autres points du système. De plus, l'intensité d'une force P pourra être choisie arbitrairement. Mais les intensités de toutes les autres forces dépendront nécessairement de l'intensité de la première.

Pour appliquer ces principes à un exemple, concevons que le système donné se compose seulement de deux points A, A' sollicités par les forces P, P', et liés par une droite $\overline{AA'}$ de longueur invariable; auquel cas l'équation $L = 0$ sera de la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{constante}.$$

Alors, si l'on vient à fixer le point A', le point A ne pourra plus se mouvoir que sur la surface d'une sphère décrite du point A' comme centre avec la longueur $\overline{AA'}$ pour rayon; et par suite, pour que le point A demeure en repos, la force P devra être perpendiculaire à la surface de la sphère, par conséquent dirigée suivant le rayon $\overline{AA'}$, ou suivant son prolongement. Comme on peut faire un raisonnement semblable à l'égard de la force P', il est permis de conclure que, dans le cas d'équilibre, chacune des forces P, P' agira suivant la droite $\overline{AA'}$ prolongée dans un sens ou dans un autre. De plus, afin que la tendance de cette droite au mouvement reste la même dans les deux sens, il sera évidemment nécessaire que les forces P, P' aient les mêmes intensités et agissent en sens contraires. Réciproquement, si les forces P, P' sont égales et agissent en sens contraires suivant la droite $\overline{AA'}$, il est clair qu'elles se feront équilibre aux extrémités de cette droite.

Revenons maintenant au cas où plusieurs points A, A', A'', ... se trouvent assujettis à une liaison représentée par l'équation

$$L = 0. \tag{1}$$

Soient toujours x, y, z; x', y', z'; etc......, les coordonnées de ces points; $P, P', P'', \ldots$ les forces qui leur sont appliquées; et désignons par

$$X, Y, Z; \quad X' Y' Z'; \quad \text{etc....}$$

les projections algébriques des forces $P, P' P'', \ldots$ sur les axes des x, des y et des z. Chaque force devant être perpendiculaire à la surface que son point d'application est assujetti à décrire, en vertu de la liaison $L = 0$, lorsque tous les autres points deviennent fixes; on aura nécessairement

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{X}{\left(\dfrac{dL}{dx}\right)} = \dfrac{Y}{\left(\dfrac{dL}{dy}\right)} = \dfrac{Z}{\left(\dfrac{dL}{dz}\right)} \\ \dfrac{X'}{\left(\dfrac{dL}{dx'}\right)} = \dfrac{Y'}{\left(\dfrac{dL}{dy'}\right)} = \dfrac{Z'}{\left(\dfrac{dL}{dz'}\right)}, \\ \text{etc.....}; \end{array} \right. \tag{2}$$

et par suite

$$
(3)\quad
\begin{cases}
X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz};\\
X'=\lambda'\dfrac{dL}{dx'}, & Y'=\lambda'\dfrac{dL}{dy'}, & Z'=\lambda'\dfrac{dL}{dz'};\\
\text{etc.}\dots,
\end{cases}
$$

λ, λ' etc.... désignant des coëfficients dont le premier dépendra de l'intensité de la force P, le second de l'intensité de la force P', etc.... De plus, comme l'intensité de la force P est une quantité arbitraire, mais de laquelle dépendent nécessairement les intensités des forces P', P'', etc.... ; il est clair qu'on pourra choisir à volonté la valeur du coëfficient λ, mais que, la valeur de λ étant donnée, celles de λ', λ'', etc......, devront s'en déduire immédiatement. Pour découvrir la relation qui existe entre λ' et λ, supposons que tous les points deviennent fixes à l'exception des deux points A, A'. Alors ces deux derniers points restant seuls mobiles, si la liaison $L=0$ a pour effet de les maintenir constamment à la même distance l'un de l'autre, il faudra que les forces P, P' soient égales et dirigées en sens contraires, ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$
(4)\qquad X'=-X,\qquad Y'=-Y,\qquad Z'=-Z.
$$

Or, dans la même hypothèse, l'équation $L=0$ se réduisant à la forme

$$
(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\text{constante},
$$

on en conclura

$$
(5)\qquad \frac{dL}{dx'}=-\frac{dL}{dx},\qquad \frac{dL}{dy'}=-\frac{dL}{dy},\qquad \frac{dL}{dz'}=-\frac{dL}{dz}.
$$

Par suite les formules (3) donneront

$$
(6)\quad
\begin{cases}
X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz},\\
X'=-\lambda'\dfrac{dL}{dx}, & Y'=-\lambda'\dfrac{dL}{dy}, & Z'=-\lambda'\dfrac{dL}{dz};
\end{cases}
$$

et les valeurs de X, Y, Z, X', Y', Z' satisferont aux équations (4), si l'on a

$$
(7)\qquad \lambda'=\lambda.
$$

Supposons maintenant que, dans le cas où les points A, A' restent seuls mobiles, la liaison

(8) $$L = 0$$

n'oblige plus ces deux points à rester constamment à la même distance l'un de l'autre. On pourra joindre à la liaison $L = 0$, celles qu'on établit entre les deux points, en les unissant par une droite invariable, et fixant le milieu de cette droite. Cela posé, si l'on désigne par a, b, c les coordonnées du point milieu, et par $\mathfrak{D}$ la longueur de la droite, on aura entre les six variables

$$x, y, z; \quad x', y', z',$$

les cinq équations

(9) $$\left\{\begin{array}{c} L = 0; \\ x + x' = 2a, \quad y + y' = 2b, \quad z + z' = 2c; \\ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \mathfrak{D}^2; \end{array}\right.$$

dont la dernière peut être remplacée par la suivante

(10) $$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{4}.$$

En vertu des cinq équations (9), les positions des points A, A' ne seront pas complètement déterminées; mais ils pourront décrire deux courbes correspondantes tracées sur la surface d'une même sphère, de manière à se trouver toujours situés aux extrémités d'un même diamètre. Dans ces courbes, les cordes correspondantes, et par suite les tangentes menées par des points correspondants seront évidemment parallèles. Si l'on suppose

$$L = f(x, y, z, x', y', z' \ldots),$$

la courbe décrite par le point A en particulier sera déterminée par le système des deux équations

(11) $$\left\{\begin{array}{c} f(x, y, z, \quad 2a - x, \quad 2b - y, \quad 2c - z, \ldots) = 0, \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{4}. \end{array}\right.$$

De plus, si l'on décompose la force P en deux autres, l'une perpendiculaire à la courbe que peut décrire le point A, l'autre dirigée suivant la tangente à cette courbe, la force perpendiculaire étant incapable de produire aucun effet, on pourra en faire abs-

traction, et ne considérer que la force dirigée suivant la tangente. On pourra de même remplacer la force P' par sa composante suivant la tangente à la courbe que peut décrire le point A'. Cela posé, comme les points A, A' sont situés à l'extrémité d'une droite invariable dont le milieu est fixe, et que les tangentes menées par ces points aux courbes qu'ils peuvent décrire sont parallèles, il est clair que les forces dirigées suivant ces tangentes, pour maintenir en équilibre les points A, A', devront être égales et agir dans le même sens; ce qui exige que les forces P, P', respectivement multipliées par les cosinus des angles que forment leurs directions avec la direction de l'une des tangentes prolongée dans un sens déterminé, fournissent des produits égaux et de même signe. Or la tangente à la courbe que peut décrire le point A, prolongée dans un certain sens, forme avec les axes des angles qui ont pour cosinus

$$\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}};$$

tandis que les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par les directions des force P, P' sont respectivement

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{P},$$

$$\frac{X'}{P'}, \quad \frac{Y'}{P'}, \quad \frac{Z'}{P'}.$$

Par suite les cosinus des angles compris entre la direction de la tangente et celles des forces P, P' seront respectivement égaux, le premier à

$$\frac{X dx+Y dy+Z dz}{P\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

et le second à

$$\frac{X' dx+Y' dy+Z' dz}{P'\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

En multipliant le premier par la force P, le second par la force P', et égalant les produits, on trouvera

$$\frac{X dx+Y dy+Z dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{X' dx+Y' dy+Z' dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad X dx + Y dy + Z dz = X' dx + Y' dy + Z' dz.$$

Si dans cette dernière équation on remet pour X, Y, Z, X', Y', Z' leurs valeurs tirées des formules (3), elle deviendra

$$(13) \qquad \lambda\left\{\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right\}=\lambda'\left\{\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz\right\}.$$

D'ailleurs, en différenciant la première des équations (11), on en conclut

$$(14) \qquad \frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz.$$

Donc par suite on aura généralement

$$(15) \qquad \lambda=\lambda';$$

on trouvera de même $\lambda=\lambda''$, $\lambda=\lambda'''$, etc.... Cela posé, les équations (3) prendront la forme

$$(16) \qquad \begin{cases} X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz},\\ X'=\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & Y'=\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & Z'=\lambda\dfrac{dL}{dz'},\\ \text{etc.}\dots; \end{cases}$$

et l'on en conclura

$$(17) \qquad \frac{X}{\left(\frac{dL}{dx}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{dL}{dy}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{dL}{dz}\right)}=\frac{X'}{\left(\frac{dL}{dx'}\right)}=\frac{Y'}{\left(\frac{dL}{dy'}\right)}=\frac{Z'}{\left(\frac{dL}{dz'}\right)}=\text{etc.}\dots$$

Donc, pour qu'il y ait équilibre entre les forces P, P', P''..., dans le cas où leurs points d'application A, A', A'',... se trouvent assujettis à la seule liaison $L=0$, il est nécessaire et il suffit que les projections algébriques de ces forces sur les axes coordonnés soient respectivement proportionnelles aux dérivées de la fonction L prises par rapport aux variables $x, y, z; x', y', z'$; etc..... Alors, si l'on désigne par n le nombre des points A, A', A'',... la formule (17) fournira $3n-1$ équations distinctes qui seront précisément les équations d'équilibre. Ajoutons que les résistances opposées par la liaison $L=0$ aux mouvements des points A, A', A'',... seront employées à détruire les forces P, P'.... Donc ces résistances seront égales et directement opposées aux forces dont il s'agit. Donc les projections algébriques de ces résistances sur les axes coordonnés seront respectivement égales aux seconds membres des équations (16), pris avec le signe $-$, c'est-à-dire aux quantités

$$(18)\quad \begin{cases} -\lambda\dfrac{dL}{dx}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ -\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz'}, \\ \text{etc....} \end{cases}$$

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, supposons qu'en vertu de l'équation $L=0$, la somme des distances $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$, $\overline{A''A'''}$, etc...., respectivement comprises entre les points A, A', A''... rangés dans un certain ordre, doive demeurer constante. Dans cette hypothèse, l'équation $L=0$ pourra être présentée sous la forme

$$(19)\quad \sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}+\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]}+\text{etc.} = \text{constante};$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(20)\quad r'=\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]},\ r''=\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]},\ \text{etc...}$$

la formule (17) donnera

$$(21)\quad \frac{X}{\left(\frac{x-x'}{r'}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{y-y'}{r'}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{z-z'}{r'}\right)}=\frac{X'}{\frac{x'-x}{r'}+\frac{x'-x''}{r''}}=\frac{Y'}{\frac{y'-y}{r'}+\frac{y'-y''}{r''}}=\frac{Z'}{\frac{z'-z}{r'}+\frac{z'-z''}{r''}}=\text{etc...}$$

En égalant les trois premières fractions entre elles, on trouve

$$(22)\quad \frac{X}{x-x'}=\frac{Y}{y-y'}=\frac{Z}{z-z'},$$

et l'on en conclut que, dans le cas d'équilibre, la force P est nécessairement dirigée suivant la droite $\overline{AA'}$. En égalant les trois fractions suivantes, on trouve

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{X'}{\frac{x'-x}{r'}+\frac{x'-x''}{r''}}=\dfrac{Y'}{\frac{y'-y}{r'}+\frac{y'-y''}{r''}}=\dfrac{Z'}{\frac{z'-z}{r'}+\frac{z'-z''}{r''}} \\ =\dfrac{X'\left(\frac{x'-x}{r'}-\frac{x'-x''}{r''}\right)+Y'\left(\frac{y'-y}{r'}-\frac{y'-y''}{r''}\right)+Z'\left(\frac{z'-z}{r'}-\frac{z'-z''}{r''}\right)}{\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r'^2}-\frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}{r''^2}}; \end{cases}$$

et comme on a, en vertu des équations (20),

$$\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r'^2}-\frac{(x''-x')^2-(y''-y')^2+(z''-z')^2}{r''^2}=0,$$

on tire évidemment de la formule (23)

$$X'\left(\frac{x'-x}{r'}-\frac{x''-x'}{r''}\right)+Y'\left(\frac{y'-y}{r'}-\frac{y''-y'}{r''}\right)+Z'\left(\frac{z'-z}{r'}-\frac{z''-z'}{r''}\right)=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24)\quad \frac{X'}{P'}\,\frac{x'-x}{r'}+\frac{X'}{P'}\,\frac{y'-y}{r'}+\frac{Z'}{P'}\,\frac{z'-z}{r'}=\frac{X'}{P'}\,\frac{x''-x'}{r''}+\frac{Y'}{P'}\,\frac{y''-y'}{r''}+\frac{Z'}{P'}\,\frac{z''-z'}{r''}.$$

Cette dernière équation exprime que la force P' forme avec les deux droites $\overline{AA'}$ $\overline{A'A''}$ des angles égaux. De plus, comme, en prenant pour plan des x, y celui qui renferme ces deux droites, on a

$$z=0,\quad z'=0,\quad z''=0,$$

et qu'alors on tire de la formule (21)

$$Z'=0;$$

il est clair que la direction de la force P' est comprise dans le plan de ces mêmes droites. Par suite, elle est dirigée de manière à diviser l'angle des droites AA', $A'A''$ en parties égales.

On se trouverait conduit aux mêmes conclusions par la géométrie, en observant que la force P' doit être perpendiculaire à la surface que le point A' est obligé de décrire quand il demeure seul mobile. Or, dans cette hypothèse, il ne reste de variables que les longueurs $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$ dont la somme doit être constante. Le point A' décrit donc alors un ellipsoïde de révolution engendré par une ellipse dont les points fixes A', A'' sont précisément les deux foyers; et la force P', devant être normale à l'ellipsoïde, par conséquent à l'ellipse génératrice, divisera nécessairement l'angle formé par les rayons vecteurs menés aux foyers, en deux parties égales.

§ 3.° *Équilibre de plusieurs points assujettis à diverses liaisons.*

Considérons maintenant des forces P, P', P'',.... dont les points d'application A, A', A''... soient assujettis à des liaisons quelconques. Soient toujours x, y, z; x', y', z',... les coordonnées des différents points; X, Y, Z; X', Y', Z',... les projections algébriques des forces P, P',... sur les axes coordonnés; et supposons que les diverses liaisons soient exprimées par les équations

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \quad \text{etc.}\ldots, \tag{1}$$

L, M, N,... désignant des fonctions des variables x, y, z; x', y', z'; etc.... Si l'équilibre a lieu, en vertu des liaisons données, entre les forces P, P', P'',... on pourra, sans troubler cet équilibre, substituer à la première liaison $L=0$, le système des résistances qu'elle oppose aux mouvements des différents points, c'est-à-dire, un système de forces dont les projections algébriques sur les axes seraient des quantités de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} -\lambda\dfrac{dL}{dx}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ -\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz'}, \\ -\text{etc.}\ldots & & \end{array}\right.$$

On pourra ensuite supprimer la seconde liaison, pourvu qu'on la remplace par un système équivalent de forces dont les projections algébriques sur les axes seraient de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} -\mu\dfrac{dM}{dx}, & -\mu\dfrac{dM}{dy}, & -\mu\dfrac{dM}{dz}, \\ -\mu\dfrac{dM}{dx'}, & -\mu\dfrac{dM}{dy'}, & -\mu\dfrac{dM}{dz'}, \\ -\text{etc.}\ldots & & \end{array}\right.$$

En continuant de même, on finira par supprimer toutes les liaisons, dont chacune se trouvera remplacée par le système des résistances qu'elle oppose aux mouvements des différents points. Alors, ces points étant redevenus libres et indépendants les uns des autres, il devra y avoir séparément équilibre entre la force et les résistances appliquées à chacun d'eux. Cela posé, l'équilibre entre la force et les résistances appliquées au point A fournira les équations

$$X - \lambda \frac{dL}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} - \nu \frac{dN}{dx} - \text{etc.} = 0\,,$$

$$Y - \lambda \frac{dL}{dy} - \mu \frac{dM}{dy} - \nu \frac{dN}{dy} - \text{etc.} = 0\,,$$

$$Z - \lambda \frac{dL}{dz} - \mu \frac{dM}{dz} - \nu \frac{dN}{dz} - \text{etc.} = 0\,;$$

ou, ce qui revient au même, les suivantes

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \text{etc.} \dots, \\ Y &= \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \text{etc.} \dots, \\ Z &= \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \text{etc.} \dots. \end{aligned} \right.$$

On trouvera pareillement, en considérant l'équilibre des forces appliquées au point A',

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} X' &= \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \text{etc.} \dots, \\ Y' &= \lambda \frac{dL}{dy'} + \mu \frac{dM}{dy'} + \nu \frac{dN}{dy'} + \text{etc.} \dots, \\ Z' &= \lambda \frac{dL}{dz'} + \mu \frac{dM}{dz'} + \nu \frac{dN}{dz'} + \text{etc.} \dots, \end{aligned} \right.$$

etc. ......

Si n désigne le nombre des points A, A', A'', etc...., et m le nombre des liaisons $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc....; $3n$ sera le nombre des équations (4), (5), etc....; et, lorsqu'on aura éliminé entre ces équations les inconnues λ, μ, ν, etc..., il restera $3n - m$ équations d'équilibre. Les variables x, y, z; x', y', z', etc..., étant elles-mêmes au nombre de $3n$, et liées par m équations, $3n - m$ sera encore le nombre des variables indépendantes.

Les $3n - m$ équations que nous venons d'indiquer, et qui sont nécessaires dans le cas d'équilibre, suffisent évidemment pour l'assurer. En effet, ces $3n - m$ équations expriment qu'on peut satisfaire simultanément par des valeurs convenables de λ, μ, ν, etc....., aux formules (4), (5), etc.... Or, dans cette hypothèse, la force P pourra être remplacée par des forces Q, R, etc...., dont les projections algébriques sur les axes soient respectivement

$$\lambda\frac{dL}{dx},\quad \lambda\frac{dL}{dy},\quad \lambda\frac{dL}{dz};\qquad \mu\frac{dM}{dx},\quad \mu\frac{dM}{dy},\quad \mu\frac{dM}{dz};\quad \text{etc...},$$

la force P' par des forces Q', R', etc...., dont les projections algébriques sur les axes soient respectivement

$$\lambda\frac{dL}{dx'},\quad \lambda\frac{dL}{dy'},\quad \lambda\frac{dL}{dz'};\qquad \mu\frac{dM}{dx'},\quad \mu\frac{dM}{dy'},\quad \mu\frac{dM}{dz'};\quad \text{etc...};$$

etc... En conséquence, au système des forces P, P', etc...., on pourra en substituer plusieurs autres, savoir, 1.° le système des forces Q, Q', etc...., qui seront détruites par la liaison $L=0$; 2.° le système des forces R, R', etc........, qui seront détruites par la liaison $M=0$, etc.... Donc le système des points A, A', etc.,... sera dans le même cas que s'il n'était sollicité par aucune force. Donc il y aura équilibre.

Nous avons remarqué ci-dessus que le nombre des équations d'équilibre était toujours égal au nombre des variables indépendantes. On vérifie cette proposition dans le cas d'équilibre d'un polygone dont les côtés sont invariables. Il est également facile de s'assurer qu'elle est vraie pour un point libre, ou assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe, et pour un système invariable libre dans l'espace, ou assujetti à tourner autour d'un point fixe; etc.... Lorsqu'il n'y a qu'une seule liaison entre n points, le nombre des équations d'équilibre se réduit, ainsi que le nombre des variables indépendantes, à $3n-1$; et ces équations coïncident avec les formules (3) du § 2.

§ 4.° *Principe des vitesses virtuelles.*

La recherche des équations d'équilibre de plusieurs forces P, P', P'',... dont les points d'application (x, y, z), (x', y', z'), etc...., sont assujettis à des liaisons représentées par les formules $L=0$, $M=0$, etc...., peut être réduite, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, à l'élimination des inconnues λ, μ, ν,......... entre les équations (4), (5), etc..... Or, un moyen fort simple d'effectuer cette élimination est de recourir à la considération des vitesses virtuelles, en opérant comme l'a fait M. Poinsot dans le 13.° cahier du journal de l'École polytechnique. Je vais rappeler en peu de mots les résultats auxquels on parvient de cette manière.

Lorsqu'un point matériel se meut sur un plan ou dans l'espace, les coordonnées x, y, z, ainsi que l'arc s de la courbe décrite, varient avec le temps t; et, si

l'on suppose cet arc compté de manière à prendre un accroissement positif Δs, dans le cas où l'on attribue au temps t un accroissement positif Δt, la limite vers laquelle convergera le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, tandis que ses deux termes recevront des valeurs de plus en plus petites, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les accroissements infiniment petits et simultanés de l'arc s et du temps t, sera ce qu'on nomme la *vitesse* du point matériel à la fin du temps t. Donc, si l'on désigne par ω cette vitesse, on aura

$$(1) \qquad \omega = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dt}.$$

De plus, la *direction* de cette vitesse ne sera autre chose que la direction de la tangente menée par l'extrémité de l'arc s à la courbe décrite, et prolongée dans le sens du mouvement; d'où il résulte que les cosinus des angles α, β, γ, formés par cette direction avec les demi-axes des coordonnées positives, seront respectivement

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Cela posé, si l'on imagine que la vitesse ω soit représentée par une longueur portée sur sa direction à partir de l'extrémité de l'arc s, les trois produits

$$\omega\cos\alpha, \qquad \omega\cos\beta, \qquad \omega\cos\gamma,$$

exprimeront ce qu'on doit appeler les *projections algébriques* de la vitesse sur les axes des x, y, et z [voy. le 1.er volume, page 39], et se trouveront déterminés par les équations

$$(3) \qquad \omega\cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \qquad \omega\cos\beta = \frac{dy}{dt}, \qquad \omega\cos\gamma = \frac{dz}{dt}.$$

Supposons maintenant que plusieurs points A, A', A'',....... soient assujettis à certaines liaisons

$$(4) \qquad L = 0, \qquad N = 0, \qquad M = 0, \qquad \text{etc.}\dots,$$

L, M, N étant fonctions des coordonnées x, y, z; x', y', z', etc.... Tous les mouvements que le système de ces points pourra prendre par l'effet d'une cause quelconque, sans que les liaisons soient troublées, seront ce qu'on appelle des *mouvements virtuels*, et les vitesses des différents points dans un *mouvement virtuel* quelconque

seront ce qu'on nomme des *vitesses virtuelles*. Or, comme il suffira de connaître les valeurs de $x, y, z; x', y', z'$, etc...., exprimées en fonction de t, pour en déduire immédiatement celles des quantités

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt};\quad \frac{dx'}{dt},\quad \frac{dy'}{dt},\quad \frac{dz'}{dt};\quad \text{etc.} \ldots,$$

il est clair que les projections algébriques des vitesses virtuelles seront liées entre elles par autant d'équations que les coordonnées des différents points. En effet, on aura, dans tout mouvement compatible avec les liaisons données,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dL}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0,\\ \frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dM}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0,\\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cela posé, concevons que les différents points, étant parvenus au bout du temps t dans de certaines positions, puissent y être maintenus en équilibre par le moyen de forces

$$P,\quad P',\quad P'',\ldots.$$

dont les projections algébriques sur les axes des x, y, z soient respectivement X, Y, Z; X', Y', Z'; etc..... Alors, pour obtenir les équations d'équilibre, il suffira d'éliminer les inconnues $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entre les formules (4), (5) du § 3. Or on y parviendra évidemment, si l'on ajoute ces formules, après avoir multiplié la première par $\frac{dx}{dt}$, la seconde par $\frac{dy}{dt}$, la troisième par $\frac{dz}{dt}$, la quatrième par $\frac{dx'}{dt}$, etc...

On trouvera de cette manière

$$(7)\qquad X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0.$$

Par conséquent, lorsqu'il y a équilibre, l'équation (7) subsiste dans un mouvement virtuel quelconque.

Réciproquement, si l'équation (7) subsiste dans un mouvement virtuel quelconque, je dis qu'il y aura équilibre. En effet, dans cette hypothèse, la formule (7) sera satisfaite pour tous les systèmes de valeurs des quantités

(8) $$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \frac{dx'}{dt}, \quad \text{etc}\ldots,$$

qui seront propres à vérifier les équations (6). Par suite, si, au moyen des équations (6), on élimine de la formule (7) m de ces quantités, toutes les autres pouvant être choisies arbitrairement, leurs coëfficients devront se réduire à zéro. Or, pour effectuer l'élimination, il suffira d'ajouter à la formule (7), les équations (6) respectivement multipliées par des facteurs indéterminés

$$-\lambda, \quad -\mu, \quad -\nu, \quad \text{etc.}\ldots;$$

et d'égaler ensuite à zéro les m premiers coëfficients de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \text{etc.}\ldots.$$

Les facteurs $\lambda, \mu, \nu\ldots.$ étant choisis de manière à remplir ces conditions, c'est-à-dire, de manière à faire disparaître les m premiers termes de la formule

(9) $$\left\{\begin{array}{l} \left(X - \lambda\frac{dL}{dx} - \mu\frac{dM}{dx} - \nu\frac{dN}{dx} - \text{etc.}\ldots\right)\frac{dx}{dt} \\ + \left(Y - \lambda\frac{dL}{dy} - \mu\frac{dM}{dy} - \nu\frac{dN}{dy} - \text{etc.}\ldots\right)\frac{dy}{dt} \\ + \left(Z - \lambda\frac{dL}{dz} - \mu\frac{dM}{dz} - \nu\frac{dN}{dz} - \text{etc.}\ldots\right)\frac{dz}{dt} \\ + \left(X' - \lambda\frac{dL}{dx'} - \mu\frac{dM}{dx'} - \nu\frac{dN}{dx'} + \text{etc.}\ldots\right)\frac{dx'}{dt} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{array}\right.$$

les coëfficients des $3n - m$ derniers termes devront encore être séparément nuls. En conséquence on pourra réduire à zéro les coëfficients de tous les termes, c'est-à-dire, satisfaire aux équations (4), (5)... du § 3.ᵉ par des valeurs convenables des facteurs $\lambda, \mu, \nu\ldots;$ d'où il résulte qu'il y aura équilibre dans le système des points A, A', A'', etc. ...

L'équation (7), qui subsiste, lorsqu'il y a équilibre, pour tous les mouvements virtuels, renferme ce qu'on appelle le principe des vitesses virtuelles. Elle peut être présentée sous une autre forme qu'il est utile de connaître, et que nous allons rappeler ici.

Soit ω la vitesse virtuelle du point matériel A, et $\widehat{P,\omega}$ l'angle compris entre la direction de cette vitesse virtuelle et la direction de la force P. Comme les cosinus des angles formés par ces deux directions avec les axes sont respectivement

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\omega}, & \dfrac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\omega}, & \dfrac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{X}{P}, & \dfrac{Y}{P}, & \dfrac{Z}{P}; \end{array}\right.$$

on aura évidemment

$$(11)\qquad \cos(\widehat{P,\omega}) = \frac{X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}}{P.\omega},$$

$$(12)\qquad X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = P\omega\cos(\widehat{P,\omega}).$$

On trouvera de même, en désignant par ω' la vitesse virtuelle du point A',

$$(13)\qquad X'\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} + Z'\frac{dz'}{dt} = P'\omega'\cos(\widehat{P',\omega'}),$$

etc.... Par conséquent l'équation (7) pourra s'écrire ainsi qu'il suit

$$(14)\qquad P\omega\cos(\widehat{P,\omega}) + P'\omega'\cos(\widehat{P',\omega'}) + \text{etc.} \ldots = 0.$$

Dans cette dernière, chaque terme représente le produit d'une force par la vitesse virtuelle de son point d'application et par le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et la direction de la vitesse virtuelle. Un semblable produit est ce que nous nommerons le *moment virtuel* de la force. On peut l'obtenir en multipliant la force par la vitesse virtuelle projetée sur la direction de la force, ou la vitesse virtuelle par la projection de la force sur la direction de cette vitesse. Cela posé, on peut énoncer le principe des vitesses virtuelles de la manière suivante.

Pour que l'équilibre ait lieu entre plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques, il est nécessaire, et il suffit que la somme des moments virtuels de ces différentes forces soit égale à zéro, dans tous les mouvements virtuels possibles, c'est-à-dire, dans tous les mouvements compatibles avec les liaisons données.

Lorsqu'on veut déduire du principe des vitesses virtuelles toutes les équations d'équilibre relatives à un système donné, il suffit de considérer successivement autant de mouvements virtuels distincts les uns des autres qu'il y a de variables indépendantes parmi les coordonnées

$$x, y, z; \; x', y', z'; \text{ etc.} \ldots$$

Le nombre de ces mouvements virtuels sera donc $3n - m$, si n désigne le nombre des points donnés, et m le nombre des liaisons auxquelles on les suppose assujettis.

Pour montrer une application de la formule (7), concevons que les liaisons établies entre différents points $A, A', A''\ldots$ permettent d'imprimer à ces mêmes points un mouvement commun de translation parallèlement à l'axe des x. Ce mouvement de translation sera un mouvement virtuel, dans lequel les vitesses virtuelles $\omega, \omega', \omega''\ldots$ seront égales entre elles; et, si, pour fixer les idées, on suppose le mouvement dirigé dans le sens des x positives, on aura évidemment

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx''}{dt} = \ldots\ldots = \omega, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy''}{dt} = \ldots\ldots = 0, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz''}{dt} = \ldots\ldots = 0. \end{array} \right.$$

Par suite, la formule (7) donnera

$$(16) \quad (X + X' + X'' + \ldots)\omega = 0;$$

et comme, par hypothèse, la quantité ω n'est pas nulle, on tirera de l'équation (16)

$$(17) \quad X + X' + X'' + \ldots\ldots = 0.$$

De même, si un mouvement commun de translation, en vertu duquel les différents points acquerraient simultanément des vitesses égales et parallèles à l'axe des y, ou à l'axe des z, est virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons données, la formule (7) entraînera l'équation

$$(18) \quad Y + Y' + Y'' + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

ou la suivante:

$$(19) \quad Z + Z' + Z'' + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Concevons encore que, sans troubler les liaisons établies, on puisse imprimer au système des points A, A', A'', etc...., un mouvement général de rotation autour de l'axe des x; et supposons, pour fixer les idées, que ce mouvement de rotation soit direct, la courbe décrite par le point (x, y, z), dans le mouvement virtuel dont il s'agit, sera un cercle dont nous désignerons le rayon par r, et dont les équations seront de la forme

(20) $$x = \text{constante}, \qquad y^2 + z^2 = r^2.$$

Or, si l'on différencie ces équations par rapport au temps, on trouvera

(21) $$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

D'ailleurs, dans un mouvement de rotation direct autour de l'axe des x, le point (x, y, z) sera porté du côté des z positives ou du côté des z négatives, suivant que l'ordonnée y sera elle-même positive ou négative; et par conséquent le coefficient différentiel $\frac{dz}{dt}$ sera une quantité de même signe que y. Cela posé, on tirera de l'équation (21)

(22) $$\frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{y} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{-z} = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{\omega}{r}.$$

Ajoutons que, si l'on nomme s, s'... les arcs de cercle décrits par les différents points à la fin du temps t; r, r'... les rayons de ces mêmes cercles, et Δs, $\Delta s'$... les accroissements infiniment petits que prennent les arcs s, s'... pendant l'instant Δt, on aura évidemment

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta s'}{r'} = \text{etc....}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{r'}\frac{\Delta s'}{\Delta t} = \text{etc....},$$

et par suite

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r'}\frac{ds'}{dt} = \text{etc....},$$

ou plus simplement

(23) $$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega''}{r''} = \text{etc.....}$$

Donc les vitesses virtuelles des différents points seront proportionnelles aux rayons des

cercles décrits; et si l'on appelle ε la vitesse angulaire du système, c'est-à-dire la vitesse d'un point situé à l'unité de distance de l'axe des x, on aura

(24) $$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega''}{r''} = \ldots = \varepsilon$$

(25) $$\omega = \varepsilon r, \qquad \omega' = \varepsilon r', \qquad \omega'' = \varepsilon r'', \qquad \text{etc.} \ldots$$

Cela posé, les équations (21) et (22) donneront

(26) $$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -\varepsilon z, \qquad \frac{dz}{dt} = \varepsilon y,$$

On trouvera pareillement

(27) $$\frac{dx'}{dt} = 0, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\varepsilon z', \qquad \frac{dz'}{dt} = \varepsilon y',$$

etc. ...; puis l'on tirera de la formule (7)

(28) $$(yZ - zY + y'Z' - z'Y' + \ldots)\varepsilon = 0;$$

et, comme par hypothèse la quantité ε n'est pas nulle, on trouvera définitivement

(29) $$yZ - zY + y'Z' - z'Y' + \text{etc.} \ldots = 0.$$

De même, si un mouvement général de rotation en vertu duquel chacun des points A, A', A''... décrirait autour de l'axe des y ou des z un arc de cercle proportionnel à sa distance à cet axe, était virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons données, la formule (7) entraînerait l'équation

(30) $$zX - xZ + z'X' - x'Z' + \text{etc.} \ldots = 0,$$

ou la suivante :

(31) $$xY - yX + x'Y' - y'X' + \text{etc.} \ldots = 0.$$

Il est bon d'observer que les équations (17), (18) et (19), ou (29), (30) et (31) sont précisément celles qu'on obtient en égalant à zéro les sommes des projections algébriques des forces P, P', P''..., ou de leurs moments linéaires sur les axes des x, y, z. Ajoutons que chacune des sommes ainsi calculées coïncide avec l'une des projections algébriques de la force principale ou du moment linéaire principal.

Lorsque les points A, A', A''... composent un système invariable de forme, mais entièrement libre dans l'espace, les six mouvements généraux de translation parallèlement aux axes coordonnés et de rotation autour de ces axes sont compatibles avec les liaisons de ce système. Par suite, la formule (7) entraîne les six équations (17), (18), (19), (29), (30) et (31). D'ailleurs, dans la même hypothèse, celles des variables

$$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; \text{ etc.} \ldots$$

que l'on peut considérer comme indépendantes, se réduisent évidemment à six. En effet, puisqu'on suppose les points A, A', A'', A'''... liés invariablement les uns aux autres, la position de chacun d'eux sera complètement déterminée dans l'espace, si l'on connaît la position des trois premiers, c'est-à-dire les neuf coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''. De plus, les trois points A, A', A'' étant liés eux-mêmes par trois droites invariables, les neuf coordonnées dont il s'agit seront assujetties à trois équations de condition, en vertu desquelles trois de ces coordonnées deviendront fonctions des six autres. Donc il n'y aura effectivement que six variables indépendantes, et les six équations qu'on obtient en égalant à zéro les sommes des projections algébriques des forces données ou de leurs moments linéaires sur les axes des x, y et z, suffiront pour assurer l'équilibre. En d'autres termes, il suffira, pour l'équilibre, que la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissent.

Si un système invariable de forme était retenu par un point fixe, les mouvements de translation dirigés parallèlement aux axes cesseraient d'être des mouvements virtuels, puisqu'ils ne pourraient avoir lieu sans rompre les liaisons établies. Mais, en prenant le point fixe pour origine des coordonnées, on pourrait encore imprimer au système des points A, A', A''..... un mouvement de rotation autour de l'un quelconque des axes coordonnés. Par suite la formule (7) entraînerait toujours les trois équations (29), (30), (31); et ces équations, dont le nombre serait précisément égal à celui des variables indépendantes, suffiraient pour assurer l'équilibre.

Si le système invariable était retenu par deux points fixes, un mouvement virtuel ne pourrait être qu'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe passant par ces deux points; et la formule (7) ne fournirait plus qu'une seule équation d'équilibre, relative à ce mouvement virtuel. Si l'on prenait l'axe fixe pour axe des z, l'équation unique d'équilibre serait celle qu'on obtient en ajoutant les projections algébriques des moments linéaires des forces sur cet axe, et égalant la somme à zéro, c'est-à-dire l'équation (31). Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'existe dans le cas présent qu'une seule variable indépendante.

Si le système invariable pouvait recevoir, non-seulement un mouvement de rotation autour de l'axe des z, mais encore un mouvement de translation dirigé parallèlement

à cet axe, ces deux mouvements virtuels fourniraient les équations (19) et (31) qui suffiraient pour assurer l'équilibre.

Enfin, si les points renfermés dans le plan des x, y sont assujettis à n'en jamais sortir, le mouvement de rotation autour de l'axe des z, et les mouvements de translation dirigés parallèlement aux axes des x et y fourniront pour le système invariable trois équations d'équilibre, savoir, les formules (17), (18) et (31). Comme, dans la même hypothèse, le nombre des variables indépendantes sera égal à trois, les équations dont il s'agit suffiront pour exprimer les conditions d'équilibre.

Les conséquences que nous venons de déduire du principe des vitesses virtuelles s'accordent évidemment avec les résultats auxquels nous étions parvenus, dans le premier volume, par la considération directe des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires.

Concevons maintenant que, les points A, A', A'',... étant assujettis à des liaisons quelconques, les forces P, P', P'',... qui sollicitent ces mêmes points, se réduisent à des poids. Admettons en outre que l'axe des x soit vertical, et que les x positives se comptent dans le sens de la pesanteur, on aura, dans ce cas,

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{llll} X=P, & X'=P', & X''=P'', & \text{etc.}\ldots, \\ Y=0, & Y'=0, & Y''=0, & \text{etc.}\ldots, \\ Z=0, & Z'=0, & Z''=0, & \text{etc.}\ldots; \end{array} \right.$$

et la formule (7) donnera

$$(33) \qquad P\frac{dx}{dt}+P'\frac{dx'}{dt}+P''\frac{dx''}{dt}+\text{etc.}\ldots=0.$$

D'ailleurs, si l'on nomme ξ l'abscisse du centre des forces parallèles P, P', P'',... respectivement appliquées aux points A, A', A'',....... c'est-à-dire, en d'autres termes, l'abscisse du centre de gravité du système, on aura

$$(34) \qquad Px+P'x'+P''x''+\ldots=(P+P'+P''+\ldots)\xi,$$

et par suite

$$(35) \qquad P\frac{dx}{dt}+P'\frac{dx'}{dt}+P''\frac{dx''}{dt}+\ldots=(P+P'+P''+\ldots)\frac{d\xi}{dt}.$$

Donc la formule (33) pourra être réduite à

(36) $$\frac{d\xi}{dt}=0.$$

Or, il résulte de cette dernière équation que, dans tout mouvement compatible avec les liaisons du système, la vitesse virtuelle du centre de gravité, étant projetée sur l'axe des x, donnera une projection nulle. Donc, pour qu'il y ait équilibre entre différents poids, il est nécessaire et il suffit que, dans chaque mouvement virtuel, la direction primitive de la vitesse du centre de gravité soit horizontale.

Dans ce qui précède, nous avons admis que les résistances opposées aux mouvements de différents points par des liaisons établies entre eux pouvaient croître indéfiniment et au-delà de toute limite. Concevons maintenant que ces résistances ne puissent dépasser certaines limites sans que les liaisons se trouvent rompues, alors il ne suffira plus pour l'équilibre que l'on puisse déterminer les coefficients λ, μ, ν, ... de manière à vérifier les équations (4), (5), etc.... du § 3.° Il faudra encore que les valeurs de λ, μ, ν,... tirées de ces équations, et substituées dans les produits

$$\lambda^2\left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right\},\quad \mu^2\left\{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right),\quad \nu^2\left\{\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right\}\ldots$$

fournissent des nombres dont les racines carrées ne dépassent pas les limites des résistances que la première, la seconde, la troisième .... liaison peuvent opposer, sans se rompre, au mouvement du premier point. Il sera de même nécessaire que les racines carrées des produits

$$\lambda^2\left\{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right\},\ \mu^2\left\{\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz'}\right)^2\right\},\ \nu^2\left\{\left(\frac{dN}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz'}\right)^2\right\}\ldots$$

ne dépassent les limites des résistances que les diverses liaisons peuvent opposer au mouvement du second point; et ainsi de suite.



DE LA PRESSION DANS LES FLUIDES.

Dans les traités de mécanique où les équations d'équilibre des fluides ne sont pas immédiatement déduites de la formule des vitesses virtuelles, on a recours, pour démontrer ces équations, au principe de *l'égalité de pression en tout sens.* Or, ce principe lui-même peut être facilement établi à l'aide des considérations suivantes.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point pris au hasard dans une masse fluide en équilibre, dont chaque molécule est sollicitée par une certaine force accélératrice, et X, Y, Z les projections algébriques de cette force sur les axes coordonnés pour le point (x, y, z). Si l'on fait passer par ce même point une surface s plane, rigide et infiniment petite, cette surface devra rester en équilibre, et par conséquent les pressions exercées contre elles par les couches de fluide qui l'avoisinent de part et d'autre, devront se réduire à des forces égales et directement opposées. De plus, chacune de ces pressions devra être perpendiculaire au plan de la surface s. Car, si cette condition n'était pas remplie, les molécules fluides qui touchent la surface ne pourraient demeurer en repos. Cela posé, si l'on désigne par ps chacune des deux pressions dont il s'agit, le rapport $\frac{ps}{s}$ ou la quantité p sera ce qu'on nomme la *pression hydrostatique*, exercée au point (x, y, z) contre le plan de la surface s.

Considérons maintenant dans la masse fluide un second point qui ait pour coordonnées x_o, y et z. Faisons passer par ce point un nouveau plan, et traçons dans ce nouveau plan une surface infiniment petite s_o, dont la projection sur le plan des y, z se confonde avec celle de la surface s. Enfin, soit a cette projection, et p_o la pression hydrostatique exercée au point (x_o, y, z) contre le plan de la surface s_o. L'équilibre qui a lieu dans la masse fluide ne sera pas troublé, si l'on vient à solidifier une portion de cette masse. Or, admettons que la partie solidifiée soit comprise dans le cylindre qui aurait pour génératrice une droite parallèle à l'axe des x, et pour bases les surfaces infiniment petites s_o, s. Soit d'ailleurs ρ la densité du liquide au point x, y, z, et supposons $x > x_o$. Si l'on projette sur l'axe de x les forces motrices qui sollicitent les diverses molécules du cylindre, et les pressions supportées par les deux bases, on trouvera $a\int_{x_o}^{x} \rho X\,dx$ pour la somme des projections algébriques des forces motrices appliquées aux diverses molécules, $p_o s_o \times \frac{a}{s_o}$, ou $p_o a$ pour la pro-

jection algébrique de la pression $p_o s_o$ supportée par la surface s_o, enfin $ps \times -\frac{a}{s}$, ou $-pa$ pour la projection algébrique de la pression ps supportée par la surface s. Quant aux pressions supportées par la surface latérale, elles seront, en chaque point de cette surface, perpendiculaires à la génératrice du cylindre, et par conséquent à l'axe des x; d'où il résulte que leurs projections algébriques sur cet axe s'évanouiront. D'ailleurs le cylindre, devenu solide, doit rester encore en équilibre au milieu de la masse fluide. Donc la somme des projections algébriques des forces appliquées à ses molécules et aux surfaces qui le terminent doit se réduire à zéro. On aura donc nécessairement

$$a\int_{x_o}^{x} \rho X dx + p_o a - pa = 0,$$

et par suite

(1) $$p = p_o + \int_{x_o}^{x} \rho X dx.$$

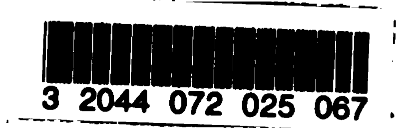
Or, si l'on vient à faire tourner le plan de la surface s autour du point (x, y, z), sans changer la position du plan qui renferme la surface s_o, la pression p, exercée contre la première surface, et déterminée par l'équation (1), ne variera pas. Donc cette pression conserve la même valeur, quel que soit le plan contre lequel elle s'exerce, ou, en d'autres termes, il y a, au point (x, y, z) choisi arbitrairement dans la masse fluide, égalité de pression en tout sens. Ajoutons que de l'équation (1) différenciée par rapport à x, on tire immédiatement

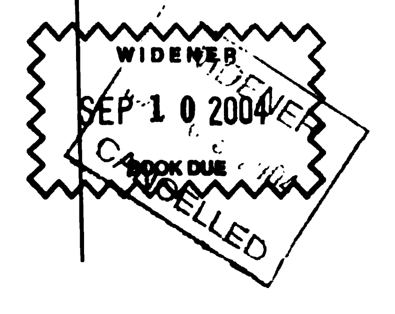
(2) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = \rho X. \quad \text{On trouvera de même} \\ \frac{dp}{dy} = \rho Y, \\ \frac{dp}{dz} = \rho Z; \end{array}\right.$$

et par suite

(3) $$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz).$$

Ces dernières formules sont les équations connues, à l'aide desquelles on fixe les conditions d'équilibre d'une masse fluide, et la valeur de la pression hydrostatique en chaque point.




WIDENER
SEP 1 0 2004
BOOK DUE
CANCELLED

